# Probabilidade Condicional e Independência. Teorema de Bayes

Ben Dêivide de Oliveira Batista

2 de fevereiro de 2016

# Motivação 1



Paulo é um jovem empreendedor e quer abrir seu próprio negócio. Ele observou que o mercado de sandálias era lucrativo. Então resolveu abrir uma fábrica de sandálias. Devido a dificuldade financeira, resolveu comprar três máquinas de sandálias usadas. As informações sobre estas máquinas dadas pelo proprietário anteriores foram:

| **Máquina** | **Produto** | **Total da produção** | **Produto com defeito** |
|---|---|---|---|
| M1 | Pantufas | 50% | 1% |
| M2 | Sandálias baixas | 40% | 2% |
| M3 | Sandálias de couto | 10% | 3% |

# Continuação...

Para Paulo surgiu as seguintes indagações:

- ✔ Qual a probabilidade de Paulo produzir uma sandália com defeito?
- ✔ Pensando em aumentar o lucro da fábrica, Paulo pensa e substituir uma das máquinas, qual seria sua decisão?
  - ✘ Será que a máquina M1 que produz mais sandálias e consequentemente tem maior desgaste, deve ser trocada primeiro?
  - ✘ Ou será que apesar da máquina M3 ter menor produção, é a que gera mais defeito por sandália, e portanto, deve ser trocada primeiro?

# Continuação...



Para Paulo surgiu as seguintes indagações:

- ✔ Qual a probabilidade de Paulo produzir uma sandália com defeito?
- ✔ Pensando em aumentar o lucro da fábrica, Paulo pensa e substituir uma das máquinas, qual seria sua decisão?
  - ✘ Será que a máquina M1 que produz mais sandálias e consequentemente tem maior desgaste, deve ser trocada primeiro?
  - ✘ Ou será que apesar da máquina M3 ter menor produção, é a que gera mais defeito por sandália, e portanto, deve ser trocada primeiro?

# Continuação...

Para Paulo surgiu as seguintes indagações:

- ✔ Qual a probabilidade de Paulo produzir uma sandália com defeito?
- ✔ Pensando em aumentar o lucro da fábrica, Paulo pensa e substituir uma das máquinas, qual seria sua decisão?
  - ✘ Será que a máquina M1 que produz mais sandálias e consequentemente tem maior desgaste, deve ser trocada primeiro?
  - ✘ Ou será que apesar da máquina M3 ter menor produção, é a que gera mais defeito por sandália, e portanto, deve ser trocada primeiro?

# Continuação...

Para Paulo surgiu as seguintes indagações:

- ✔ Qual a probabilidade de Paulo produzir uma sandália com defeito?
- ✔ Pensando em aumentar o lucro da fábrica, Paulo pensa e substituir uma das máquinas, qual seria sua decisão?
  - ✘ Será que a máquina M1 que produz mais sandálias e consequentemente tem maior desgaste, deve ser trocada primeiro?
  - ✘ Ou será que apesar da máquina M3 ter menor produção, é a que gera mais defeito por sandália, e portanto, deve ser trocada primeiro?

# Definição

Uma função $P$ tal que $P : \mathcal{F} \to [0,1]$, é chamada de medida probabilidade sob os seguintes axiomas de Kolmogorov:

A1) $P(\Omega) = 1$;

A2) $\forall A \in \mathcal{F}$, $P(A) \geq 0$;

A3) Para uma sequência finita ou infinita contável de eventos $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ multuamente exclusivos,

$$P(U_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

# Definição



Uma função $P$ tal que $P : \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$, é chamada de medida probabilidade sob os seguintes axiomas de Kolmogorov:

A1) $P(\Omega) = 1$;

A2) $\forall A \in \mathcal{F}$, $P(A) \geq 0$;

A3) Para uma sequência finita ou infinita contável de eventos $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ multuamente exclusivos,

$$P(U_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

# Definição



Uma função $P$ tal que $P : \mathcal{F} \to [0,1]$, é chamada de medida probabilidade sob os seguintes axiomas de Kolmogorov:

A1) $P(\Omega) = 1$;
A2) $\forall A \in \mathcal{F}$, $P(A) \geq 0$;
A3) Para uma sequência finita ou infinita contável de eventos $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ multuamente exclusivos,

$$P(U_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

# Definição 2



Seja um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dois eventos $D$ e $M$ de $\mathcal{F}$ são independentes se satisfaz ao menos uma das seguintes condições:

I) $P(D \cap M) = P(D)P(M)$;
II) $P(D|M) = P(D)$, para $P(M) > 0$;
III) $P(M|D) = P(M)$, para $P(D) > 0$.

$\square$

# Definição 2



Seja um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dois eventos $D$ e $M$ de $\mathcal{F}$ são independentes se satisfaz ao menos uma das seguintes condições:

I) $P(D \cap M) = P(D)P(M)$;
II) $P(D|M) = P(D)$, para $P(M) > 0$;
III) $P(M|D) = P(M)$, para $P(D) > 0$.

$\square$

# Definição 2



Seja um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dois eventos $D$ e $M$ de $\mathcal{F}$ são independentes se satisfaz ao menos uma das seguintes condições:

I) $P(D \cap M) = P(D)P(M)$;

II) $P(D|M) = P(D)$, para $P(M) > 0$;

III) $P(M|D) = P(M)$, para $P(D) > 0$.

$\square$

# Prova

É fácil mostrar que (I) implica em (II), (II) implica em (III), e (III) implica em (I).

- ✔ $(i) \to (ii)$: Se $P(D \cap M) = P(D)P(M)$, então

$$P(D|M) = \frac{P(D \cap M)}{P(D)} = \frac{P(D)P(M)}{P(M)} = P(D), \quad \text{para } P(M) > 0;$$

- ✔ $(ii) \to (iii)$: Se $P(D|M) = P(D)$, então

$$P(D|M) = \frac{P(D \cap M)}{P(D)} = \frac{P(D|M)P(D)}{P(M)} = P(M), \quad \text{para } P(D$$

- ✔ $(iii) \to (i)$: Se $P(M|D) = P(M)$, então

$$P(D \cap M) = P(M|D)P(D) = P(M)P(D), \text{para } P(D) > 0.$$

# Prova



É fácil mostrar que (I) implica em (II), (II) implica em (III), e (III) implica em (I).

- ✔ $(i) \to (ii)$: Se $P(D \cap M) = P(D)P(M)$, então

$$P(D|M) = \frac{P(D \cap M)}{P(D)} = \frac{P(D)P(M)}{P(M)} = P(D), \quad \text{para } P(M) > 0;$$

- ✔ $(ii) \to (iii)$: Se $P(D|M) = P(D)$, então

$$P(D|M) = \frac{P(D \cap M)}{P(D)} = \frac{P(D|M)P(D)}{P(M)} = P(M), \quad \text{para } P(D$$

- ✔ $(iii) \to (i)$: Se $P(M|D) = P(M)$, então

$$P(D \cap M) = P(M|D)P(D) = P(M)P(D), \text{para } P(D) > 0.$$

# Prova

É fácil mostrar que (I) implica em (II), (II) implica em (III), e (III) implica em (I).

- ✔ $(i) \to (ii)$: Se $P(D \cap M) = P(D)P(M)$, então

$$P(D|M) = \frac{P(D \cap M)}{P(D)} = \frac{P(D)P(M)}{P(M)} = P(D), \quad \text{para } P(M) > 0;$$

- ✔ $(ii) \to (iii)$: Se $P(D|M) = P(D)$, então

$$P(D|M) = \frac{P(D \cap M)}{P(D)} = \frac{P(D|M)P(D)}{P(M)} = P(M), \quad \text{para } P(D$$

- ✔ $(iii) \to (i)$: Se $P(M|D) = P(M)$, então

$$P(D \cap M) = P(M|D)P(D) = P(M)P(D), \text{para } P(D) > 0.$$

# Prova

É fácil mostrar que (I) implica em (II), (II) implica em (III), e (III) implica em (I).

- ✔ $(i) \to (ii)$: Se $P(D \cap M) = P(D)P(M)$, então

$$P(D|M) = \frac{P(D \cap M)}{P(D)} = \frac{P(D)P(M)}{P(M)} = P(D), \quad \text{para } P(M) > 0;$$

- ✔ $(ii) \to (iii)$: Se $P(D|M) = P(D)$, então

$$P(D|M) = \frac{P(D \cap M)}{P(D)} = \frac{P(D|M)P(D)}{P(M)} = P(M), \quad \text{para } P(D$$

- ✔ $(iii) \to (i)$: Se $P(M|D) = P(M)$, então

$$P(D \cap M) = P(M|D)P(D) = P(M)P(D), \text{para } P(D) > 0.$$

# Prova

É fácil mostrar que (I) implica em (II), (II) implica em (III), e (III) implica em (I).

- ✔ $(i) \rightarrow (ii)$: Se $P(D \cap M) = P(D)P(M)$, então

$$P(D|M) = \frac{P(D \cap M)}{P(D)} = \frac{P(D)P(M)}{P(M)} = P(D), \quad \text{para } P(M) > 0;$$

- ✔ $(ii) \rightarrow (iii)$: Se $P(D|M) = P(D)$, então

$$P(D|M) = \frac{P(D \cap M)}{P(D)} = \frac{P(D|M)P(D)}{P(M)} = P(M), \quad \text{para } P(D$$

- ✔ $(iii) \rightarrow (i)$: Se $P(M|D) = P(M)$, então

$$P(D \cap M) = P(M|D)P(D) = P(M)P(D), \text{para } P(D) > 0.$$

# Prova



É fácil mostrar que (I) implica em (II), (II) implica em (III), e (III) implica em (I).

- $(i) \to (ii)$: Se $P(D \cap M) = P(D)P(M)$, então

$$P(D|M) = \frac{P(D \cap M)}{P(D)} = \frac{P(D)P(M)}{P(M)} = P(D), \quad \text{para } P(M) > 0;$$

- $(ii) \to (iii)$: Se $P(D|M) = P(D)$, então

$$P(D|M) = \frac{P(D \cap M)}{P(D)} = \frac{P(D|M)P(D)}{P(M)} = P(M), \quad \text{para } P(D$$

- $(iii) \to (i)$: Se $P(M|D) = P(M)$, então

$$P(D \cap M) = P(M|D)P(D) = P(M)P(D), \text{para } P(D) > 0.$$

# Prova



É fácil mostrar que (I) implica em (II), (II) implica em (III), e (III) implica em (I).

- ✔ $(i) \to (ii)$: Se $P(D \cap M) = P(D)P(M)$, então

$$P(D|M) = \frac{P(D \cap M)}{P(D)} = \frac{P(D)P(M)}{P(M)} = P(D), \quad \text{para } P(M) > 0;$$

- ✔ $(ii) \to (iii)$: Se $P(D|M) = P(D)$, então

$$P(D|M) = \frac{P(D \cap M)}{P(D)} = \frac{P(D|M)P(D)}{P(M)} = P(M), \quad \text{para } P(D$$

- ✔ $(iii) \to (i)$: Se $P(M|D) = P(M)$, então

$$P(D \cap M) = P(M|D)P(D) = P(M)P(D), \text{para } P(D) > 0.$$

# Prova



É fácil mostrar que (I) implica em (II), (II) implica em (III), e (III) implica em (I).

- ✔ $(i) \to (ii)$: Se $P(D \cap M) = P(D)P(M)$, então

$$P(D|M) = \frac{P(D \cap M)}{P(D)} = \frac{P(D)P(M)}{P(M)} = P(D), \quad \text{para } P(M) > 0;$$

- ✔ $(ii) \to (iii)$: Se $P(D|M) = P(D)$, então

$$P(D|M) = \frac{P(D \cap M)}{P(D)} = \frac{P(D|M)P(D)}{P(M)} = P(M), \quad \text{para } P(D$$

- ✔ $(iii) \to (i)$: Se $P(M|D) = P(M)$, então

$$P(D \cap M) = P(M|D)P(D) = P(M)P(D), \text{para } P(D) > 0.$$

# Prova

É fácil mostrar que (I) implica em (II), (II) implica em (III), e (III) implica em (I).

- ✔ $(i) \to (ii)$: Se $P(D \cap M) = P(D)P(M)$, então

$$P(D|M) = \frac{P(D \cap M)}{P(D)} = \frac{P(D)P(M)}{P(M)} = P(D), \quad \text{para } P(M) > 0;$$

- ✔ $(ii) \to (iii)$: Se $P(D|M) = P(D)$, então

$$P(D|M) = \frac{P(D \cap M)}{P(D)} = \frac{P(D|M)P(D)}{P(M)} = P(M), \quad \text{para } P(D$$

- ✔ $(iii) \to (i)$: Se $P(M|D) = P(M)$, então

$$P(D \cap M) = P(M|D)P(D) = P(M)P(D), \text{para } P(D) > 0.$$

# Prova

É fácil mostrar que (I) implica em (II), (II) implica em (III), e (III) implica em (I).

- ✔ $(i) \to (ii)$: Se $P(D \cap M) = P(D)P(M)$, então

$$P(D|M) = \frac{P(D \cap M)}{P(D)} = \frac{P(D)P(M)}{P(M)} = P(D), \quad \text{para } P(M) > 0;$$

- ✔ $(ii) \to (iii)$: Se $P(D|M) = P(D)$, então

$$P(D|M) = \frac{P(D \cap M)}{P(D)} = \frac{P(D|M)P(D)}{P(M)} = P(M), \quad \text{para } P(D$$

- ✔ $(iii) \to (i)$: Se $P(M|D) = P(M)$, então

$$P(D \cap M) = P(M|D)P(D) = P(M)P(D), \text{para } P(D) > 0.$$