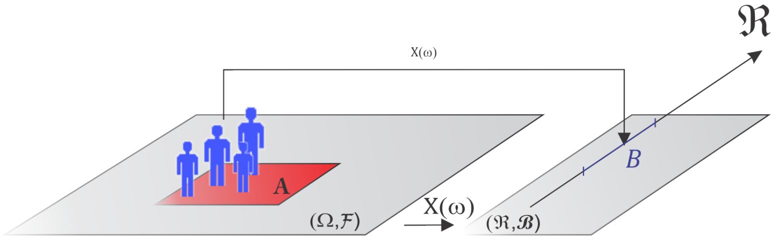
Variáveis Aleatórias Contínuas: Distribuição Normal, Distibuição Gama, Distribuição Qui-quadrado, Distribuição t de Student e Distribuição F

Ben Dêivide

13 de fevereiro de 2016

Sumário

Ilustração



Natureza da variável aleatória

Definição 1 (Variável aleatória contínua)

Uma variável aleatória X contínua é uma função que assume em uma sequência não contável de números reais distintos, pertencentes a $B \in \mathcal{B}$, sendo $\mathcal{B}$ a σ-álgebra de Borel.

Natureza da variável aleatória

Definição 1 (Variável aleatória contínua)

Uma variável aleatória X *contínua é uma função que assume em uma sequência não contável de números reais distintos, pertencentes a* $B \in \mathcal{B}$, *sendo* $\mathcal{B}$ *a* σ*-álgebra de Borel.*

Exemplo 1

Um navio petroleiro sofre um acidente no qual seu casco é rompido e o óleo é derramado. Seja X a variável aleatória que determina a área atingida pelo óleo do navio.

Natureza da variável aleatória

Definição 1 (Variável aleatória contínua)

Uma variável aleatória X contínua é uma função que assume em uma sequência não contável de números reais distintos, pertencentes a $B \in \mathcal{B}$, sendo $\mathcal{B}$ a σ-álgebra de Borel.

Exemplo 1

Um navio petroleiro sofre um acidente no qual seu casco é rompido e o óleo é derramado. Seja X a variável aleatória que determina a área atingida pelo óleo do navio.

Definição 2 (Variável Aleatória Contínua)

Uma variável aleatória X é contínua se $P_X(X = x) = 0$.

Natureza da variável aleatória

Definição 3 (Função densidade de probabilidade)

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}+$ *uma função. Então* f *é uma função densidade se* $f_X(x) \geq 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*, e* $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) = 1$*.*

Natureza da variável aleatória

Definição 3 (Função densidade de probabilidade)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}+$ *uma função. Então* f *é uma função densidade se* $f_X(x) \geq 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$, *e* $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) = 1$.

Definição 4 (Variável aleatória absolutamente contínua)

Uma variável aleatória X *é absolutamente contínua se existe uma função densidade* $f_X(x)$, *tal que*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, \tag{1}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Caracterização da variável aleatória absolutamente contínua

Definição 5 (Função de distribuição)

Se X é uma variável aleatória contínua em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, a função de distribuição F_X, se existir uma função densidade f_X, é definida por

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Caracterização da variável aleatória absolutamente contínua

Definição 5 (Função de distribuição)

Se X é uma variável aleatória contínua em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, a função de distribuição F_X, se existir uma função densidade f_X, é definida por

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Caracterização da variável aleatória absolutamente contínua

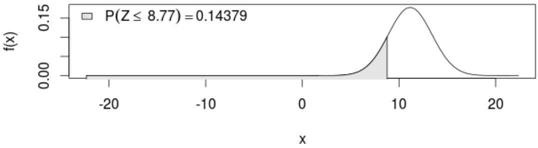
Definição 6 (Função quantil)

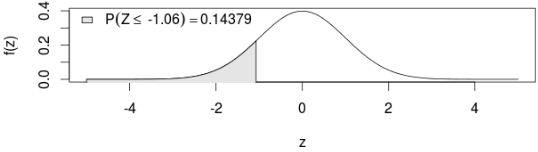
A função quantil, considerando uma variável aleatória com função de distribuição $F_X(x)$ é a função $F^{-1} : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$F^{-1}(p) = x,$$

para todo $p \in [0,1]$, em que x é o menor valor real $F_X(x) \geq p$. Assim, $F_X^{-1}(p)$ é o $p-$ésimo quantil de X ou $100p\%$ percentil de X.

Gráficos


P(Z ≤ 8.77) = 0.14379
f(x)
0.00
0.15
-20
-10
0
10
20
x


P(Z ≤ -1.06) = 0.14379
f(z)
0.0
0.2
0.4
-4
-2
0
2
4
z

Distribuição Gama

Definição 7 (Distribuição Gama)

Uma variável aleatória X contínua, tem distribuição normal se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\Gamma(r)}(\lambda x)^{r-1}e^{-\lambda x} & \text{, para } x > 0, \\ 0 & \text{, para } x \leq 0, \end{cases} \tag{2}$$

em que os parâmetros r e λ satisfazem $r > 0$ e $\lambda > 0$, e $\Gamma(.)$ é a função gama definida por:

$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} t^{r-1}e^{-t}dt, \qquad r > 0. \tag{3}$$

Distribuição Gama

Em particular, $\lambda = \frac{1}{2}$ e $r = \frac{\nu}{2}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\lambda}{\Gamma(r)}(\lambda x)^{r-1}e^{-\lambda x} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}x\right)^{\frac{\nu}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}x} \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}}x^{\frac{\nu}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}x}, \end{aligned} \tag{4}$$

conhecida como DISTRIBUIÇÃO QUI-QUADRADO.

Distribuição t de Student

Definição 8 (Distribuição t de Student)

Uma variável aleatória contínua X tem distribuição t de Student se sua função densidade de probabilidade é definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \frac{1}{\left(1+\frac{\nu^2}{2}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}} & , -\infty \leq x \leq \infty, \\ 0 & , caso\ contrário, \end{cases} \tag{5}$$

com ν graus de liberdade, sendo $\nu > 0$. Em notação $X \sim t_\nu$. □

Distribuição F

Definição 9 (Distribuição F)

Uma variável aleatória contínua X tem distribuição F se sua função densidade de probabilidade é definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma[(\nu_1+\nu_2)/2]}{\Gamma(\nu_1/2)\Gamma(\nu_2/2)} \times \left(\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\nu_1/2} \times \\ \times \dfrac{x^{(\nu_1-2)/2}}{[1+(\nu_1/\nu_2)x]^{(\nu_1+\nu_2)/2}} & \text{, para } x > 0, \\ 0 & \text{, para } x \leq 0, \end{cases} \tag{6}$$

com ν_1 e ν_2 graus de liberdade, sendo $\nu_1, \nu_2 > 0$. Em notação $X \sim F_{\nu_1,\nu_2}$. □