Lei dos Grandes Números e Teorema do Limite Central

Ben Dêivide de Oliveira Batista

17 de fevereiro de 2016

Sumário

1 Noção sobre convergência de variáveis aleatórias

2 Lei do Grandes Números

3 Teorema do Limite Central

Noções

- Estamos interessados em saber:
  Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, então sendo $n \to \infty$, para onde $X_n \to (?)$ com alta probabilidade? Mais ainda com que $P(X_n \to (?))$?

Noções

- Estamos interessados em saber:
  Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, então sendo $n \to \infty$, para onde $X_n \to (?)$ com alta probabilidade? Mais ainda com que $P(X_n \to (?))$?
- Perguntas como essas foram introduzidas quando definimos convergência em probabilidade, convergência quase certa e convergência em distribuição.

Lei do Grandes Números

Teorema 1 (Lei Fraca dos Grandes Números (LFRGN))

Seja $\{X_n; n \geq 1\}$ *uma sequência de variáveis aleatórias, independente e identicamente distribuídas (iid), definidas no espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *tal que* $E[X] = \mu$ *e* $Var[X] = \sigma^2 < \infty$. *Então, para cada* $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \leq \epsilon) = 1, \tag{1}$$

isto é, $\bar{X}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$ *converge em probabilidade para* μ, *denotada por* $\bar{X}_n \xrightarrow{p} \mu$.

Lei dos Grandes Números

A LFRGN afirma que:

$$\lim_{n \to \infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \leq \epsilon) = 1. \tag{2}$$

Lei dos Grandes Números

A LFRGN afirma que:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \leq \epsilon) = 1. \tag{2}$$

Teorema 2 (Desigualdade de Chebychev)

Seja X uma variável aleatória definida no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Considere ainda $g(x)$ uma função não negativa de X. Então para qualquer $k > 0$,

$$P(g(x) \geq k) \leq \frac{E[g(x)]}{k}. \tag{3}$$

Lei do Grandes Números

Teorema 3 (Lei Forte dos Grandes Números (LFOGN))

Seja $\{X_n; n \geq 1\}$ *uma sequência de variáveis aleatórias, independente e identicamente distribuídas (iid), definidas no espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, tal que* $E[X] = \mu$ *e* $Var[X] = \sigma^2 < \infty$*. Então, para cada* $\epsilon > 0$*,*

$$P(\lim_{n \to \infty} |\bar{X}_n - \mu| \leq \epsilon) = 1, \tag{4}$$

isto é, $\bar{X}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i / n$ *converge em quase certamente para* μ*, denotada por* $\bar{X}_n \stackrel{\text{qc}}{\to} \mu$*.* □

Lei do Grandes Números

A LFOGN afirma que

$$P(\lim_{n\to\infty} |\bar{X}_n - \mu| \leq \epsilon) = 1, \tag{5}$$

Lei do Grandes Números

A LFOGN afirma que

$$P(\lim_{n\to\infty} |\bar{X}_n - \mu| \leq \epsilon) = 1, \tag{5}$$

É possível mostrar que se $\bar{X}_n \stackrel{\text{qc}}{\to} \mu$ então

$$\forall \epsilon > 0,\ P(|\bar{X}_k - X| \leq \epsilon, \forall k \geq n) \underset{n\to\infty}{\to} 1. \tag{6}$$

Lei do Grandes Números

A LFOGN afirma que

$$P(\lim_{n\to\infty}|\bar{X}_n - \mu| \leq \epsilon) = 1, \tag{5}$$

É possível mostrar que se $\bar{X}_n \stackrel{\text{qc}}{\to} \mu$ então

$$\forall\epsilon > 0,\ P(|\bar{X}_k - X| \leq \epsilon, \forall k \geq n) \underset{n\to\infty}{\to} 1. \tag{6}$$

Para os slides seguintes, usamos a seguinte referência:
MICHEAUX, P. L.; LIQUET, B. Undertanding convergence concepts: a visual-minded and graphical simulation-based approach. **The American Staticician**.2008.

Lei do Grandes Números

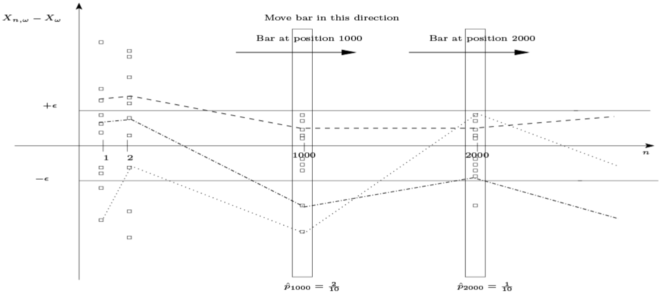

Figure 2: Seeing convergence in probability with $M = 10$ fictitious realizations. For $n = 1000$, $\hat{p}_n = 2/10$ since we can see two sample paths lying outside the band $[-\epsilon, +\epsilon]$ in the bar at position 1000. For $n = 2000$, $\hat{p}_n = 1/10$ since we can see one sample path lying outside the band $[-\epsilon, +\epsilon]$ in the bar at position 2000.

Convergência em probabilidade

Lei do Grandes Números

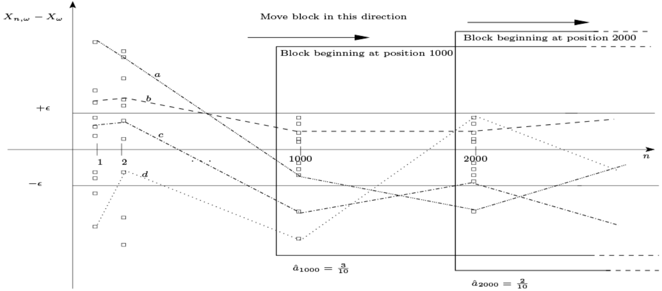

Figure 4: Seeing almost sure convergence with $M = 10$ *fictitious realizations. For* $n = 1000$, $\hat{a}_n = 3/10$ *since we can see 3 sample paths (a, c, d) lying outside the band* $[-\epsilon, +\epsilon]$ *in the block beginning at position 1000. For* $n = 2000$, $\hat{a}_n = 2/10$ *since we can see 2 sample paths (a, c) lying outside the band* $[-\epsilon, +\epsilon]$ *in the block beginning at position 2000.*

Convergência quase certa

Um dos Teoremas mais importantes na Estatística

Teorema 4 (Teorema do Limite Central (TLC))

Seja $\{X_n; n \geq 1\}$ *uma sequência de variáveis aleatórias, independente e identicamente distribuídas (iid),definidas no espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, tal que* $E[X] = \mu$ *e* $0 < Var[X] = \sigma^2 < \infty$*. Se* $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$*, então*

$$Z_n = \frac{(S_n - n\mu)}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathrm{d}} Z \sim N(0,1), \tag{7}$$

isto é, $Z_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Z$. □