Aplicação da quadratura gaussiana

Ben Dêivide de Oliveira Batista
Orientador: Daniel Furtado Ferreira
Coorientador: Lucas Monteiro Chaves

12 de dezembro de 2012

- ✔ **Fórmula de recorrência de três termos para polinômios ortogonais**:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\hat{\nu}_{i+1}}p_{i+1}^{*}(x) &= \left(x - \hat{\beta}_i\right)p_i^{*}(x) - \sqrt{\hat{\nu}_i}p_{i-1}^{*}(x), \quad i \geq 0 \\
p_0^{*}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\int\limits_a^b w(x)dx}},
\end{aligned}
$$

em que $p_{-1}^{*}(x) \equiv 0$, $\hat{\beta}_i$ e $\hat{\nu}_i$ são coeficientes observados na Tabela 1, e que $w(x)$ é a função peso do polinômio ortogonal.

- ✔ **Matriz de Jacobi**:

$$J = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 & \sqrt{\hat{\nu}_1} & \ldots & & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{\hat{\nu}_1} & \hat{\beta}_1 & \sqrt{\hat{\nu}_2} & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \sqrt{\hat{\nu}_2} & \hat{\beta}_2 & \sqrt{\hat{\nu}_3} & \ldots & \vdots & \vdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \sqrt{\hat{\nu}_{i-2}} & \hat{\beta}_{i-2} & \sqrt{\hat{\nu}_{i-1}} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \sqrt{\hat{\nu}_{i-1}} & \hat{\beta}_{i-1} \end{bmatrix},$$

sendo $\hat{\beta}_k$, $k = 0,1,\ldots,i-1$ e $\hat{\nu}_k$, $k = 1,\ldots,i-1$ pelos termos de recorrência dos polinômios ortonormais.

- ✔ Autovalores (nós):

$$\mathbf{x}^* = \underbrace{\begin{bmatrix} x_0^* \\ x_1^* \\ \ldots \\ x_{i-1}^* \end{bmatrix}}_{\text{ordem decrescente}} \longrightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_{i-1}^* \\ x_{i-2}^* \\ \ldots \\ x_0^* \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_i \end{bmatrix}}_{\text{ordem crescente}}$$

Polinômios ortogonais e quadratura

✔ Autovetores:

$$P^* = \begin{bmatrix} p^*_{0,0} & p^*_{0,1} & \cdots & p^*_{0,i-1} \\ p^*_{1,0} & p^*_{1,1} & \cdots & p^*_{1,i-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p^*_{i-1,0} & p^*_{i-1,1} & \cdots & p^*_{i-1,i-1} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$P = \begin{bmatrix} p^*_{0,i-1} & p^*_{0,i-2} & \cdots & p^*_{0,0} \\ p^*_{1,i-1} & p^*_{1,i-2} & \cdots & p^*_{1,0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p^*_{i-1,i-1} & p^*_{i-1,i-2} & \cdots & p^*_{i-1,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,i} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{i,1} & p_{i,2} & \cdots & p_{i,i} \end{bmatrix}$$

A quadratura gaussiana resolve uma integral da seguinte forma,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{i} w_k g(x_k),$$

sendo,

$$w_k = L_k = \mu_0 \times \mathbf{v}_{1,k}^2,$$

com $\mathbf{v}_{1,k} = (p_{1,1}, p_{1,2}, \ldots, p_{1,i})^T$ e $\mu_0 = \int_a^b w(x)dx$, e

$$g(x_k) = \frac{1}{w(x)} f(x_k).$$

Tabela resumo das quadraturas gaussianas

QUAD.	Int.	μ_0	$\hat{\beta}$	$\sqrt{\hat{\nu}}$	$w(x)$
Leg.	$[-1,1]$	2	0	$\sqrt{\hat{\nu_j}} = j/\sqrt{4j^2-1},\ \ j = 1,2,\ldots,i-1$	1
Cheb. 1	$[-1,1]$	π	0	$\sqrt{\hat{\nu_j}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & j = 1 \\ \frac{1}{2}, & j = 2,\ldots,i-1 \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{(1-x)}}$
Cheb. 2	$[-1,1]$	$\pi/2$	0	$\sqrt{\hat{\nu_j}} = 0{,}5,\ \ j = 1,2,\ldots,i-1$	$\sqrt{1-x^2}$
Lag. gen.	$[0,\infty]$	$\Gamma(\alpha+1)$	(*)	$\sqrt{\hat{\nu_j}} = \sqrt{j(\alpha+j)},\ \ j = 1,2,\ldots,i-1$	$\frac{x^\alpha}{e^x}$
Herm.	$[-\infty,\infty]$	$\sqrt{\pi}$	0	$\sqrt{\hat{\nu_j}} = \sqrt{j/2},\ \ j = 1,2,\ldots,i-1$	e^{-x^2}

Tabela 1: Quadro resumo para resolução de uma integral por meio da quadratura gaussiana.

$$(*)\hat{\beta}_{j-1} = \begin{array}{l} 2j-1+\alpha, \\ \alpha > -1, \\ j = 1,2,\ldots,i-1. \end{array}$$

Exemplo.1: Calcular $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$.

1. $i = 3$ pontos;
2. polinômio ortogonal utilizado será o de "Legendre", com $w(x) = 1$, no intervalo $[-1{,}1]$, e coeficientes

$$\hat{\beta} = \mathbf{0} \text{ e } \sqrt{\hat{\nu_j}} = j/\sqrt{4j^2 - 1}, \;\; j = 1{,}2, \ldots, i-1;$$

3. Construir a matriz de jacobi com $\hat{\beta}$ e $\sqrt{\hat{\nu_j}}$;

Exemplo.1: Calcular $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$.

De forma usual,

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = [\ln(x)]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = 0{,}6931472.$$

1. $i = 3$ pontos;
2. polinômio ortogonal utilizado será o de "Legendre", com $w(x) = 1$, no intervalo $[-1{,}1]$, e coeficientes

$$\hat{\beta} = \mathbf{0} \text{ e } \sqrt{\hat{\nu_j}} = j/\sqrt{4j^2 - 1},\ \ j = 1{,}2, \ldots, i-1;$$

3. Construir a matriz de jacobi com $\hat{\beta}$ e $\sqrt{\hat{\nu_j}}$;

Exemplo.1: Calcular $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$.

De forma usual,

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = [\ln(x)]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = 0{,}6931472.$$

Usando a quadratura,

1. $i = 3$ pontos;
2. polinômio ortogonal utilizado será o de "Legendre", com $w(x) = 1$, no intervalo $[-1{,}1]$, e coeficientes

$$\hat{\beta} = \mathbf{0} \text{ e } \sqrt{\hat{\nu_j}} = j/\sqrt{4j^2 - 1},\ \ j = 1{,}2,\ldots,i-1;$$

3. Construir a matriz de jacobi com $\hat{\beta}$ e $\sqrt{\hat{\nu_j}}$;

Exemplo de aplicação

Exemplo.1: Calcular $\int\limits_1^2 \frac{1}{x}dx$.

De forma usual,

$$\int\limits_1^2 \frac{1}{x}dx = [\ln(x)]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = 0{,}6931472.$$

Usando a quadratura,

1. $i = 3$ pontos;
2. polinômio ortogonal utilizado será o de "Legendre", com $w(x) = 1$, no intervalo $[-1{,}1]$, e coeficientes

$$\hat{\beta} = \mathbf{0} \text{ e } \sqrt{\hat{\nu_j}} = j/\sqrt{4j^2 - 1}, \;\; j = 1{,}2, \ldots, i - 1;$$

3. Construir a matriz de jacobi com $\hat{\beta}$ e $\sqrt{\hat{\nu_j}}$;

Exemplo.1: Calcular $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$.

De forma usual,

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = [\ln(x)]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = 0{,}6931472.$$

Usando a quadratura,

1. $i = 3$ pontos;
2. polinômio ortogonal utilizado será o de "Legendre", com $w(x) = 1$, no intervalo $[-1{,}1]$, e coeficientes

$$\hat{\beta} = \mathbf{0} \text{ e } \sqrt{\hat{\nu_j}} = j/\sqrt{4j^2 - 1}, \;\; j = 1{,}2, \ldots, i-1;$$

3. Construir a matriz de jacobi com $\hat{\beta}$ e $\sqrt{\hat{\nu_j}}$;

4. A partir da matriz de jacobi J, extrai-se os seus autovalores (λ^*) e os seus autovetores $(\mathbf{v}_k)$;
5. Ordenar os autovalores em ordem crescente $x_k = \lambda_k$, bem como seus autovetores correspondentes;
6. Determinar $w_k = L_k = 2\mathbf{v}_{1,k}^2$, sendo observado μ_0 na Tabela 1;
7. transformando os valores de x_k;
8. Determinar $g(x_k) = \frac{1}{w(x)} f(x_k) = f(x_k)$;
9. Calcular, finalmente,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{i} w_k g(x_k).$$

No R...

Exemplo de aplicação

4. A partir da matriz de jacobi J, extrai-se os seus autovalores (λ^*) e os seus autovetores $(\mathbf{v}_k)$;
5. Ordenar os autovalores em ordem crescente $x_k = \lambda_k$, bem como seus autovetores correspondentes;
6. Determinar $w_k = L_k = 2\mathbf{v}_{1,k}^2$, sendo observado μ_0 na Tabela 1;
7. transformando os valores de x_k;
8. Determinar $g(x_k) = \frac{1}{w(x)} f(x_k) = f(x_k)$;
9. Calcular, finalmente,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{i} w_k g(x_k).$$

No R...

Exemplo de aplicação

4. A partir da matriz de jacobi J, extrai-se os seus autovalores (λ^*) e os seus autovetores $(\mathbf{v}_k)$;
5. Ordenar os autovalores em ordem crescente $x_k = \lambda_k$, bem como seus autovetores correspondentes;
6. Determinar $w_k = L_k = 2\mathbf{v}_{1,k}^2$, sendo observado μ_0 na Tabela 1;
7. transformando os valores de x_k;
8. Determinar $g(x_k) = \frac{1}{w(x)} f(x_k) = f(x_k)$;
9. Calcular, finalmente,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{i} w_k g(x_k).$$

No R...

Exemplo de aplicação

4. A partir da matriz de jacobi J, extrai-se os seus autovalores (λ^*) e os seus autovetores $(\mathbf{v}_k)$;
5. Ordenar os autovalores em ordem crescente $x_k = \lambda_k$, bem como seus autovetores correspondentes;
6. Determinar $w_k = L_k = 2\mathbf{v}_{1,k}^2$, sendo observado μ_0 na Tabela 1;
7. transformando os valores de x_k;
8. Determinar $g(x_k) = \frac{1}{w(x)} f(x_k) = f(x_k)$;
9. Calcular, finalmente,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{i} w_k g(x_k).$$

No R...

Exemplo de aplicação

4. A partir da matriz de jacobi J, extrai-se os seus autovalores (λ^*) e os seus autovetores $(\mathbf{v}_k)$;
5. Ordenar os autovalores em ordem crescente $x_k = \lambda_k$, bem como seus autovetores correspondentes;
6. Determinar $w_k = L_k = 2\mathbf{v}_{1,k}^2$, sendo observado μ_0 na Tabela 1;
7. transformando os valores de x_k;
8. Determinar $g(x_k) = \frac{1}{w(x)} f(x_k) = f(x_k)$;
9. Calcular, finalmente,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{i} w_k g(x_k).$$

No R...

Exemplo de aplicação

4. A partir da matriz de jacobi J, extrai-se os seus autovalores (λ^*) e os seus autovetores $(\mathbf{v}_k)$;
5. Ordenar os autovalores em ordem crescente $x_k = \lambda_k$, bem como seus autovetores correspondentes;
6. Determinar $w_k = L_k = 2\mathbf{v}_{1,k}^2$, sendo observado μ_0 na Tabela 1;
7. transformando os valores de x_k;
8. Determinar $g(x_k) = \frac{1}{w(x)} f(x_k) = f(x_k)$;
9. Calcular, finalmente,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{i} w_k g(x_k).$$

No R...

Transformação na aplicação

Transformação:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)}{2}t + \frac{(b+a)}{2}\right)dt.$$

Transformação na aplicação

Transformação:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)}{2}t + \frac{(b+a)}{2}\right)dt.$$

$$\int_1^2 f(x)dx = \frac{2-1}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{(2-1)}{2}t + \frac{(1+2)}{2}\right)dt.$$

Transformação:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)}{2}t + \frac{(b+a)}{2}\right)dt.$$

$$\int_1^2 f(x)dx = \frac{2-1}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{(2-1)}{2}t + \frac{(1+2)}{2}\right)dt.$$

$$\int_1^2 f(x)\,dx \approx 0.5\sum_{i=1}^{n} w_k^* f\left(0.5t_k^* + 1.5\right).$$